Дата публикации 04.06.2026
УДК 378

Леонтьева Н.В. Формирование представлений об аксиоматическом методе у будущих учителей математики

Леонтьева Наталия Владимировна
канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики
Глазовский государственный инженерно-педагогический университет
им. В. Г. Короленко
РФ, г. Глазов
leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Axiomatic methods representations formation among future mathematics teachers

Leont'eva Nataliya Vladimirovna
Cand. Peg. (Pedagogy), Docent, assistant professor
Mathematics and Informatics department
Glazov State University of Engineering and Pedagogics named after V.G. Korolenko
Russia, Glazov

Аннотация. Высокое качество обучения школьников математике требует подготовки квалифицированных педагогических кадров. Изучение как содержательных, так и методологических вопросов способствует развитию у студентов математической культуры. Одним из основных понятий курса математики является число. Формирование представлений у будущих учителей математики о структуре числовых множеств способствует пониманию сути аксиоматического метода, как базовой основы построения математических теорий.
Ключевые слова: аксиоматический метод, подготовка учителей математике, методика высшей математики, фундаментальная математическая подготовка, числовые системы

Abstract. Schoolchildren mathematics education high quality requires the training of qualified teaching staff. The study of both substantive and methodological issues contributes to the development of students' mathematical culture. Basic concepts of the mathematics course is a number. The formation of ideas among future mathematics teachers about the structure of numerical sets contributes to understanding the essence of the axiomatic method as the basic basis for building mathematical theories.
Keywords: Axiomatic methods, mathematics teachers training, higher mathematics methods, fundamental mathematics educations, numerical systems.

Технологическое развитие России представляет собой одно из значимых условий сохранения суверенитета страны. В соответствии с «Концепцией технологического развития на период до 2030 года» для его реализации требуется обеспечить подготовку большого числа высококвалифицированных специалистов [10, с. 14]. Фундаментальной основой обучения инженерно-технологических кадров является математическое образование.

Достижение высокого уровня математической подготовки школьников не возможно без квалифицированных учителей математики. Изучение студентами предметно-методического модуля, направленного на освоение теоретических основ математики и методики обучения математике, создает условия для формирования математической культуры.

Как отмечает Е.М. Вечтомов, научить студентов учить математике можно только в процессе ее изучения [1, с. 11]. В связи с этим существенное значение имеет обучение студентов базовым основам математики в процессе ее изучения. М.И. Высокос и В.А. Панчищина указывают на тот факт, что учитель математики должен владеть достаточно серьезной предметной подготовкой [2, с. 168]. Одновременно, проведенный в работе К.А. Халатян, Л.А. Григорян и Л.Г. Зверевой анализ показывает, что значимости высшей математики в подготовке студентов уделяется недостаточно внимания [3, с. 336]. Однако именно изучение высшей математики позволяет обобщить и систематизировать не только содержательные, но и методологические вопросы, что обеспечивает понимание школьного курса математики.

Обратим внимание на обучение будущих учителей основам аксиоматического метода, что позволяет осознать основы построения математической теории. В.И. Игошин указывает, что владение аксиоматическим методом представляет собой часть логической и общей культуры образованного человека [4, с. 21]. Его изучение осуществляется студентами в рамках различных дисциплин, таких как геометрия, математическая логика, числовые системы.

Определим методические особенности обучения будущих учителей математики аксиоматическому методу на примере материалов курса числовых систем. Его основой является строгий аксиоматический подход к построению понятия числа [5, с. 265]. Выбор данного курса обусловлен тем, что доказательство различных теорем, касающихся свойств чисел, представляет собой достижимую учебную задачу. Тем самым создаются условия для последовательного расширения представлений о различных числовых множествах и взаимосвязях между ними.

Изучение аксиоматического метода способствует формированию целостного понятия обучающихся об окружающей действительности и основаниях математической науки в целом [6, с. 125]. Обозначим его основные понятия.

Построение математической теории начинают с перечисления основных неопределяемых понятий [11, с. 4]. В аксиоматическом определении множества натуральных чисел к таким объектам относят понятия «элемент» или «число», а также «множество» [11, с. 6]. Акцентирование внимания студентов на том, что некоторые понятия, изученные ими ранее в школьном курсе математики, являются основными и неопределяемыми, позволяет уточнить грань между строгим определением математического понятия и интуитивным описанием, которое для них дается. Затем указываются отношения между основными неопределяемыми объектами. В данном случае к ним отнесем отношения «принадлежность» (число принадлежит множеству), «равенство» и «следует за», которое обозначается n' [11, с. 6]. Из всех введенных отношений наиболее сложным для понимания и требующим дополнительных пояснений, является последнее. Приведение очевидных примеров позволяет уточнить его смысл.

Введение системы утверждений, касающихся неопределяемых понятий и отношений, представляет собой систему аксиом множества натуральных чисел. За основу может быть принята система аксиом Пеано [11, с. 6-7].

1. Во множестве натуральных чисел существует единица, которая не следует ни за каким другим числом.

2. Для каждого натурального числа существует единственное следующее за ним.

3. Каждое натуральное следует не более чем за одним натуральным числом.

4. Если подмножество M множества натуральных чисел содержит единицу, а также вместе с каждым натуральным числом следующее за ним, то M совпадает с множеством натуральных чисел.

При ее обсуждении важно подчеркнуть тот факт, что эти утверждения приняты без доказательства и при необходимости их можно заменить иными эквивалентными утверждениями. Формирование указанных представлений обобщает и систематизирует основы понимания содержательно-интуитивного подхода, который используется в школе для объяснения свойств различных числовых множеств [7, с. 27]. С точки зрения аксиоматического подхода под числом могут пониматься не только привычные для студентов со школьного курса объекты, но и самые различные элементы. Следовательно, актуальной задачей становится построение модели множества натуральных чисел [8, с. 83]. Для этого в качестве упражнения могут быть предложены для изучения различные модели натуральных чисел. В качестве примера можно рассмотреть следующую задачу.

Пример 1. Могут ли нечетные натуральные числа представлять собой модель множества натуральных чисел, если $n' = n + 1$?

В процессе выполнения подобных заданий основное внимание следует уделить проверке справедливости аксиом Пеано и строгому обоснованию того факта, что конкретная аксиома не выполняется. В рассмотренном примере не выполняется первая аксиома, так как элементы «1» и «3» не имеют предшествующих, что противоречит требованию единственности подобного числа.

В.И. Горбачев в своей работе описывает три различных подхода к построению моделей числовых множеств: геометрические, арифметические и алгебраические модели [9, с. 87-89]. Изучение различных видов моделей, сравнение их между собой позволяет лучше представить различные нюансы введенной аксиоматики.

Следующим вопросом, на который следует обратить внимание студентов, являются вопросы обоснования выбора системы аксиом. К ней предъявляют определенные требования, в число которых входят непротиворечивость, независимость и полнота [11, с. 4]. Преимуществом аксиоматики Пеано является то, что на ее основе достаточно просто показать их выполнимость. Обсуждение указанных категорий позволяет обосновать значимость и не случайность выбора каждого утверждения, которое было включено в качестве аксиомы.

Следующим понятием, которое вводится в курсе числовых систем, являются определения основных операций над числами. В качестве примера приведем следующее определение.

Сложением натуральных чисел назовем бинарную операцию, удовлетворяющую следующим условиям [11, с. 13]:

1) $a + 1 = a'$;

2) $a + b' = (a + b)'$.

Операции над числами также вводятся аксиоматически. Одновременно важно подчеркнуть тот факт, что введенное определение не противоречит вводимым в школьном курсе представлениям о действиях над числами. С этой целью можно разобрать ряд простейших примеров.

Пример 2. Найдите сумму $1 + 1 = 1' = 2$.

Выполнение более сложных вычислений требует уже обоснования различных свойств операций над числами.

На основании аксиоматики множества натуральных чисел, в частности, можно доказать такие свойства операций над числами как коммутативность, ассоциативность, дистрибутивные законы. При обсуждении доказательства указанных утверждений акцентируем внимание студентов на том, что ранее в курсе математики указанные правила принимались на интуитивном уровне без доказательства. Приведенные рассуждения позволяют строго обосновать их справедливость, что подтверждает достоверность всех использованных ранее утверждений, основанных на свойствах операций над числами.

При подготовке материалов для работы со студентами существенную сложность представляет собой разделение основных свойств чисел на две группы так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

– утверждения выстаиваются в такую логическую цепочку, чтобы при доказательстве одного из них, применялись предыдущие утверждения;

– для доказательства использовались различные методы рассуждений (метод математической индукции, метод от противного, прямые логические рассуждения).

Подчеркивание того факта, какое именно утверждение используется при доказательстве очередной теоремы (определение или свойство) позволяет продемонстрировать логическую стройность курса математики, выводимость одних утверждений с помощью других.

После введения основных операций для натуральных чисел вводится отношение «больше», операции вычитания и деления, обосновываются его основные свойства [11, с. 22]. На этом завершается построение множества натуральных чисел.

Как указывает Е.И. Деза, введение операции вычитания наглядно демонстрирует недостаточность множества натуральных чисел [5, с. 265]. В связи с этим требуется определить такое новое числовое множество, в котором можно было найти разность любых двух чисел. Результатом становится описание множества целых чисел.

Существуют различные подходы к его определению. В первом случае с помощью операции вычитания вводится понятия противоположного числа и множеством целых чисел называют кольцо, содержащее натуральные числа, нуль и числа им противоположные [11, с. 31]. Во втором случае применяются алгебраические структуры. Кольцо целых чисел – минимальное кольцо, содержащее полукольцо целых чисел [11, с. 31]. При обсуждении указанных понятий важно подчеркнуть, что они являются эквивалентными, аксиоматическими и не противоречивыми. Аналогичным образом вводятся последующие числовые множества.

Изучение курса «Числовые системы» позволяет в полной мере представить основные понятия, особенности и требования, предъявляемые к аксиоматическому методу, а также продемонстрировать полноценное построение математической теории числа. Обоснование справедливости введения основных операций над числами, а также их основных свойств позволяют подтвердить достоверность всех сделанных ранее выводов, где они ранее применялись без доказательства. В результате создаются условия для формирования у студентов на содержательном уровне представлений о логичности и общности математики, как науки. Акцентирование внимания обучающихся на особенностях введения определений, методах и нюансах проведения доказательств способствует пониманию методологического уровня освоения математики, что имеет существенное значение для подготовки будущих учителей.

Список литературы

1. Вечтомов, Е. М. Нужно ли обучать высшей математике будущих учителей математики / Е. М. Вечтомов // Настоящее и будущее физико-математического образования : Материалы докладов V всероссийской научно-практической конференции, Киров, 26–27 октября 2018 года / Ответственный редактор Ю.А. Сауров. – Киров: Общество с ограниченной ответственностью "Радуга-ПРЕСС", 2018. – С. 10-14.
2. Высокос, М. И. Вопросы предметно-методической подготовки будущих учителей математики / М. И. Высокос, В. А. Панчищина // Проблемы современного педагогического образования. – 2023. – № 81-2. – С. 168-170.
3. Халатян, К. А. Вузовская математика в структуре профессиональных знаний будущих учителей математики / К. А. Халатян, Л. А. Григорян, Л. Г. Зверева // Бизнес. Образование. Право. – 2023. – № 3(64). – С. 335-340. – DOI 10.25683/VOLBI.2023.64.691.
4. Игошин, В. И. Аксиоматический метод для школьников и их учителей математики / В. И. Игошин // Математика и проблемы образования : Материалы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, Киров, 22–24 сентября 2022 года. – Киров: Издательство "Веси", 2022. – С. 20-22. – EDN THQMLE.
5. Деза, Е. И. Проблемы формирования понятия числа у будущего учителя математики / Е. И. Деза // Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе : Материалы международной научно-практической интернет-конференции, Москва, 22–26 апреля 2019 года / под ред. Л. Л. Босовой, Д. И. Павлова. – Москва: Московский педагогический государственный университет, 2019. – С. 264-267.
6. Сухан, И. В. К вопросу о методике изучения аксиоматического метода в курсе математической логики в вузе / И. В. Сухан, Г. Г. Кравченко, О. В. Иванисова // Педагогика высшей школы. – 2017. – № 2(8). – С. 125-128.
7. Вечтомов, Е. М. Натуральный ряд / Е. М. Вечтомов // Математика в высшем образовании. – 2012. – № 10. – С. 15-34.
8. Путилов, С. В. Формирование у будущих учителей математики представлений о моделях средствами учебной дисциплины «Числовые системы» / С. В. Путилов, Ю. А. Еловикова, М. М. Сорокина // Высшее образование сегодня. – 2024. – № 4. – С. 80-84. – DOI 10.18137/RNU.HET.24.04.P.080.
9. Горбачев, В. И. Базовые модели учебной теории числового пространства в содержании общего математического образования / В. И. Горбачев // Математика и проблемы образования : Материалы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, Киров, 22–24 сентября 2022 года. – Киров: Издательство "Веси", 2022. – С. 86-89.

Список источников

10. Концепция технологического развития на период до 2030 года URL: https://rospatent.gov.ru/content/uploadfiles/technological-2023.pdf (дата обращения: 17.05.2026).

11. Числовые системы: учебное пособие для направления подготовки бакалавров050100.62 «Педагогическое образование» Профиль «Математика» / составитель И.В. Глухова. – Ульяновск: УлГПУ, 2014. – 80 с.